Krzysztof Trajkowski

Przegląd pakietów do optymalizacji liniowej

1. Wprowadzenie

Niniejsze opracowanie dotyczy opisu funkcji `solveLP(linprog)` i `lp(lpSolve)` za pomocą których możemy rozwiązywać zadania programowania liniowego.

Liniowa funkcja celu jest postaci:

$$f(x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ \ldots\ + c_nx_n \rightarrow (\min) \quad \text{lub} \quad (\max) \tag{1.1}$$

gdzie: $c_n \in \mathcal{R}$.

Gradient czyli wektor, który jest prostopadły do liniowej funkcji celu (1.1):

$$\nabla f(x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n) = [c_1,\ c_2,\ \ldots\ c_n] \tag{1.2}$$

Ograniczenia które tworzą zbiór rozwiązań dopuszczalnych są dane następującymi wzorami:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ \ldots\ + a_nx_n \leqslant b \tag{1.3a}$$
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ \ldots\ + a_nx_n \geqslant b \tag{1.3b}$$
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ \ldots\ + a_nx_n = b \tag{1.3c}$$

gdzie: $a_n \in \mathcal{R}$ oraz $b \in \mathcal{R}$.

Ograniczenia brzegowe:

$$x_1 \geqslant 0,\ \ldots\ x_n \geqslant 0 \tag{1.4}$$

Tak sformułowane ograniczenia (1.3a)-(1.3c) oraz ograniczenia brzegowe (1.4) tworzą zbiór rozwiązań dopuszczalnych.

2. Zadanie programowania liniowego

Funkcja celu:

$$2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \tag{2.1}$$

Gradient:

$$[2,\ 3] \tag{2.2}$$

Ograniczenia:

$$-3x_1 + 9x_2 \leqslant 36 \tag{2.3}$$
$$4x_1 - 5x_2 \leqslant 11 \tag{2.4}$$
$$-3x_1 - 2x_2 \leqslant -6 \tag{2.5}$$
$$4x_1 + 3x_2 \leqslant 39 \tag{2.6}$$

Ograniczenia brzegowe: $x_1 \geqslant 0$ oraz $x_2 \geqslant 0$.

Aby znaleźć wierzchołki wielokąta wypukłego (zbiór rozwiązań dopuszczalnych - rysunek 2.1) należy rozwiązać kilka układów równań. Na listingu 2.1 został przedstawiony sposób rozwiązania wybranego układu rownań (2.7):

$$\begin{cases} -3x + 9y = 36 \\ 4x + 3y = 39 \end{cases} \tag{2.7}$$

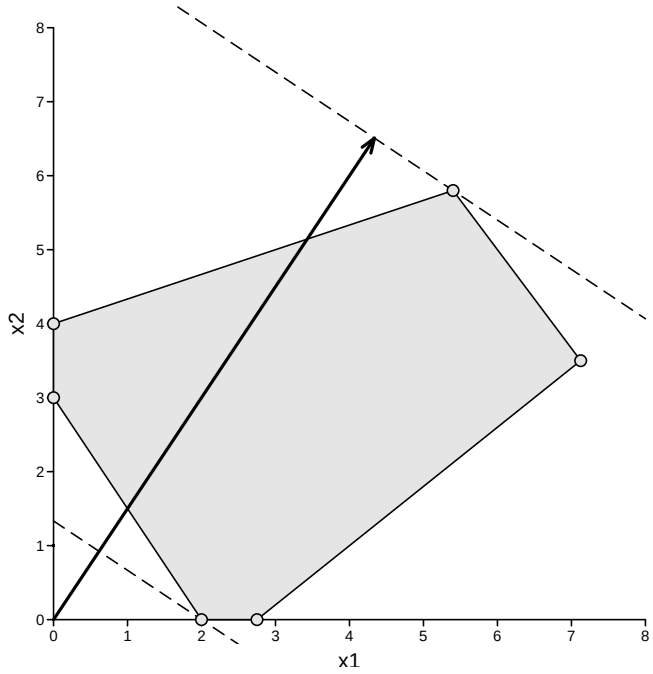
Listing 2.1: Rozwiązanie układu równań (2.7)

```
> A=matrix(c(-3,4,9,3),2,2)
> B=matrix(c(36,39),2,1)
> solve(A)%*%B
     [,1]
[1,]  5.4
[2,]  5.8
```

Graficzna prezentacja rozwiązania ZPL jest przedstawiona na rysunku 2.1. Kod jest przedstawiony na listingu 2.2:

Listing 2.2: Rozwiązanie ZPL - metoda graficzna

```
> plot(0,1,col="black",pch=".",xlim=c(0,8),ylim=c(0,8),axes=F,xlab="",ylab=↩
    "")
> mtext(side=1, line=0, paste("x1"),cex=0.8);mtext(side=2, line=0, paste("↩
    x2"),cex=0.8)
> axis(1,c(0:8),pos=0,las=1,mgp=c(3, -0.1 ,0),tcl=-0.2,cex.axis=.6)
> axis(2,c(0:8),pos=0,las=1,mgp=c(3, 0.3 ,0),tcl=-0.2,cex.axis=.6)
> curve(add=T,lty=5,(-2/3)*x+47/5)
> curve(add=T,lty=5,(-2/3)*x+4/3)
> p=data.frame(x1=c(2,0,0,5.4,7.125,2.75),x2=c(0,3,4,5.8,3.5,0)) # ↩
    wierzchołki wielokąta wypukłego
> polygon(p,col="gray90")
> points(p,pch=21,bg="gray90")
> arrows(0,0,282/65,423/65,length=0.1,angle=20,lwd=2) # gradient funkcji ↩
    celu
```



Rysunek 2.1: Rozwiązanie graficzne.

Listing 2.3: Rozwiązanie ZPL

```
> fc=function(x){ # funkcja celu
+     x1=x[1]
+     x2=x[2]
+     2*x1+3*x2
+ }
```

```
> p=data.frame(x1=c(2,0,0,5.4,7.125,2.75),x2=c(0,3,4,5.8,3.5,0)) # ↩
    wierzchołki wielokąta wypukłego
> min(fc(p)) # minimalna wartość funkcji celu
[1] 4
> max(fc(p)) # maksymalna wartość funkcji celu
[1] 28.2
> range(fc(p)) # wartości ekstremalne funkcji celu
[1]  4.0 28.2
```

Na listingu 2.4 zostało przedstawione rozwiązanie ZPL za pomocą funkcji `solveLP(linprog)`.

Listing 2.4: Rozwiązanie ZPL - funkcja solveLP

```
> library(linprog) # załadowanie pakietu linprog
> f=c(2,3) # współczynniki funkcji celu
> b=c(36,11,-6,39)
> m=matrix(c(-3, 4, -3, 4, 9, -5, -2,3),4,2)
> solveLP(f,b,m,T)

Results of Linear Programming / Linear Optimization

Objective function (Maximum): 28.2

Iterations in phase 1: 1
Iterations in phase 2: 3
Solution
  opt
1 5.4
2 5.8

Basic Variables
     opt
1    5.4
2    5.8
S 2 18.4
S 3 21.8

Constraints
  actual dir bvec free      dual dual.reg
1   36.0  <=   36  0.0 0.133333   25.875
2   -7.4  <=   11 18.4 0.000000   18.400
3  -27.8  <=   -6 21.8 0.000000   21.800
4   39.0  <=   39  0.0 0.600000   27.000

All Variables (including slack variables)
     opt cvec      min.c    max.c       marg marg.reg
1    5.4    2 -1.000000 4.000000         NA       NA
2    5.8    3  1.500000      Inf         NA       NA
S 1  0.0    0       -Inf 0.133333 -0.133333   25.875
S 2 18.4    0 -0.187500 1.285714  0.000000       NA
S 3 21.8    0 -0.818182 6.000000  0.000000       NA
S 4  0.0    0       -Inf 0.600000 -0.600000   27.000
```

Oprócz rozwiązania optymalnego które wynosi $f_{max} = 28,2$ dla $x_1 = 5,4$ i $x_2 = 5,8$ otrzymaliśmy także kilka dodatkowych informacji:

- zasoby s_1 i s_4 zostały wykorzystane w całości. Z kolei zasobu s_2 i s_3 pozostało odpowiednio $18,4$ i $21,8$.
- rozwiązanie dualne wynosi: $y_1 = 0,13$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, $y_4 = 0,6$.
- zmiana wybranego współczynnika funkcji celu (2.1) dla $c_1 = 2$ na przedziale $c_1 \in \langle -1; 4 \rangle$ lub dla $c_2 = 3$ na przedziale $c_2 \in \langle 1,5; \infty \rangle$ nie spowoduje zmiany wartości x_1 oraz x_2.

Rozwiązanie tego samego zadania za pomocą funkcji `lp(lpSolve)` jest przedstawione na listingu 2.5.

Listing 2.5: Rozwiązanie ZPL - funkcja lp

```
> library(lpSolve) # załadowanie pakietu lpSolve
> f=c(2,3) # współczynniki funkcji celu
> m=matrix ( c(-3,4,-3,4, 9,-5,-2,3), 4,2)
> o=c("<=","<=","<=","<=")
> b=c(36,11,-6,39)
> lp("max",f,m,o,b) # maksymalna wartość funkcji celu
Success: the objective function is 28.2
> lp("max",f,m,o,b)$solution # wartości zmiennych decyzyjnych x1 oraz x2
[1] 5.4 5.8
> lp("max",f,m,o,b,compute.sens=T)$duals # rozwiązanie dualne
[1] 0.1333333 0.0000000 0.0000000 0.6000000 0.0000000 0.0000000
```

Warto w tym miejscu zaznaczyć, że ograniczenia brzegowe $x_1 \geqslant 0$ oraz $x_2 \geqslant 0$ są ustawieniami domyślnymi. A więc nie musimy ich uwzględniać w kodzie.

Jeżeli chcemy, aby wszystkie zmienne decyzyjne należały do zbioru liczb całkowitych dodatnich ($x_1 \in \mathcal{Z}_+$ oraz $x_2 \in \mathcal{Z}_+$) należy użyć opcji `int.vec=TRUE`.

Listing 2.6: Rozwiązanie ZPL - funkcja lp

```
> lp("max",f,m,o,b,int.vec=T)
Success: the objective function is 27
> lp("max",f,m,o,b,int.vec=T)$solution
[1] 6 5
```

Z kolei dla założenia $x_1 \in \{0, 1\}$ oraz $x_2 \in \mathcal{Z}_+$ należy użyć opcję `int.vec=2` (dla zmiennej x_2) oraz `binary.vec=1` (dla zmiennej x_1).

Listing 2.7: Rozwiązanie ZPL - funkcja lp

```
> lp("max",f,m,o,b,int.vec=2,binary.vec=1)
Success: the objective function is 14
> lp("max",f,m,o,b,int.vec=2,binary.vec=1)$solution
[1] 1 4
```

3. Zadanie transportowe

Zadanie transportowe możemy rozwiązać z wykorzystaniem funkcji `lp(lpSolve)`. Jednak w środowisku R mamy do dyspozycji funkcję `lp.transport(lpSolve)` za pomocą której mamy możliwość rozwiązć takie zadanie. Przykładowe dane zostały przedstawione w tabeli 3.1.

Tabela 3.1. ZT.

	Odb_1	Odb_2	Odb_3	
$Dost_1$	20	16	18	30
$Dost_2$	15	15	20	25
$Dost_3$	14	11	12	22
$Dost_4$	11	10	14	20
	16	27	22	

Ponieważ $97 > 65$ (tzn. $30 + 25 + 22 + 20 > 16 + 27 + 22$) to mamy do czynienia z niezbilansowanym zadaniem transportowym. Występuje przewaga podaży (dostawcy) nad popytem (odbiorcy).

Funkcja celu:

$$\begin{aligned} 20x_{11} + 16x_{12} + 18x_{13} + 15x_{21} + 15x_{22} + 20x_{23} \\ +14x_{31} + 11x_{32} + 12x_{33} + 11x_{41} + 10x_{42} + 14x_{43} \rightarrow \min \end{aligned} \tag{3.1}$$

Ograniczenia dla dostawców:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &\leqslant 30 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &\leqslant 25 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} &\leqslant 22 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} &\leqslant 20 \end{aligned}$$

Ograniczenia dla odbiorców:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 16 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 27 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 22 \end{aligned}$$

Listing 3.1: Rozwiązanie ZT - funkcja lp.transport

```
> m= matrix(c(20,15,14,11,16,15,11,10,18,20,12,14),4,3)
> rs= rep("<=",4)
> rm= c(30,25,22,20)
> cs= rep("=",3)
> cm= c(16,27,22)
> lp.transport(m, "min", rs, rm, cs, cm)
Success: the objective function is 809
> lp.transport(m, "min", rs, rm, cs, cm)$solution
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    0    0    0
[2,]   16    7    0
[3,]    0    0   22
[4,]    0   20    0
```

4. Zadanie przydziału

Zadanie przydziału polega na przydzieleniu pracownika do stanowiska pracy. Przykładowe dane do tego typu zadania zostały przedstawione w tabeli 4.1 - liczba godzin jaką potrzebuje każdy z pracowników na wykonanie określonego zadania.

Tabela 4.1. ZP.

	Zad_1	Zad_2	Zad_3	Zad_4	
$Prac_1$	8	8	7	4	1
$Prac_2$	5	5	8	7	1
$Prac_3$	6	7	5	9	1
$Prac_4$	4	4	8	5	1
	1	1	1	1	

Funkcja celu:

$$\begin{aligned} 8x_{11} + 8x_{12} + 7x_{13} + 4x_{14} + 5x_{21} + 5x_{22} + 8x_{23} + 7x_{24} \\ +6x_{31} + 7x_{32} + 5x_{33} + 9x_{34} + 4x_{41} + 4x_{42} + 8x_{43} + 5x_{44} \rightarrow \min \end{aligned} \tag{4.1}$$

Ograniczenia dla pracowników:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1$$

Ograniczenia dla zadań:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1$$

Rozwiązanie zadania przydziału z wykorzystaniem funkcji `lp.transport(lpSolve)`:

Listing 4.1: Rozwiązanie ZP - funkcja lp.transport

```
> m= matrix(c(8,5,6,4,8,5,7,4,7,8,5,8,4,7,9,5),4,4)
> rs= rep("=",4)
> rm= c(1,1,1,1)
> cs= rep("=",4)
> cm= c(1,1,1,1)
> lp.transport(m, "min", rs, rm, cs, cm)
Success: the objective function is 18
> lp.transport(m, "min", rs, rm, cs, cm)$solution
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    0    0    0    1
[2,]    1    0    0    0
[3,]    0    0    1    0
[4,]    0    1    0    0
```

W przypadku rozwiązywania zbilansowanego zadania przydziału (liczba pracowników jest równa liczbie zadań - tabela 4.1) wygodniej jest wykorzystać funkcję `lp.assign(lpSolve)`:

Listing 4.2: Rozwiązanie ZP - funkcja lp.assign

```
> m= matrix(c(8,5,6,4,8,5,7,4,7,8,5,8,4,7,9,5),4,4)
> lp.assign(m, "min")
Success: the objective function is 18
> lp.assign(m, "min")$solution
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    0    0    0    1
[2,]    1    0    0    0
[3,]    0    0    1    0
[4,]    0    1    0    0
```